15/04/16

Resolução Lista Exercícios de Revisão para a Prova 1 de CE-084.

1) $P(A) = 0.5$ $\qquad P(N|A) = 0.01$
$P(B) = 0.25$ $\qquad P(N|B) = 0.02$
$P(C) = 0.25$ $\qquad P(N|C) = 0.04$

$P(A|N) = ?$, onde N: massa não crescer.

$$P(A|N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(N|A) \cdot P(A)}{P(N)} \to ?$$

$$P(N) = P(N \cap A) + P(N \cap B) + P(N \cap C)$$
$$= P(N|A) \times P(A) + P(N|B) \times P(B) + P(N|C) \times P(C)$$
$$= 0.01 \times 0.5 + 0.02 \times 0.25 + 0.04 \times 0.25$$
$$= 0.005 + 0.005 + 0.01$$
$$P(N) = 0.02$$

$$P(A|N) = \frac{0.01 \times 0.5}{0.02} = \frac{0.005}{0.02} = 0.25$$

Dado que uma massa de bolo não cresceu, a probabilidade de que ela tenha sido preparada por A é de 0.25.

2) $P(M) = 1/3$ $\qquad P(C|M) = 0.2$, C: Estudar ciências
$P(F) = 2/3$ $\qquad P(C|F) = 0.1$

a) $P(C) = P(C \cap M) + P(C \cap F)$
$$= P(C|M) \times P(M) + P(C|F) \times P(F)$$
$$= 0.2 \times (1/3) + 0.1 \times (2/3)$$
$$= 0.0667 + 0.0667$$
$$P(C) = 0.13 = 2/15$$

b) $P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|F) \times P(F)}{P(C)} = 0.5128 \Rightarrow \frac{1}{2}$

15 / 04 / 16

3) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \overbrace{6, 7, 8, 9}^{>5}\}$, $\begin{cases} N = 10 \\ n = 4 \end{cases}$

a) Sequência: Ex. {2, 3, 4, 5}

7 sequências possíveis → $\frac{7}{C_4^{10}} = \frac{7}{210} = 0.033$

b) Todos sejam maiores que 5:

$= \frac{1}{C_4^{10}} = \frac{1}{210} = 0.0048$

c) O número 0 seja escolhido entre os 4:

$\underbrace{\frac{1}{}}_{0} \times C_3^9 = 84$

$= \frac{84}{210} = 0.4$

d) Pelo menos um seja MAIOR do que 7:

$\boxed{X: \text{nº de selecionados} > 7}$

1 é maior do que 7:

$\Rightarrow 8 : C_3^8 = 56$

ou

$\Rightarrow 9 : C_3^8 = 56$

$\boxed{X = 1} \Rightarrow 56 + 56$

$= 112$ combinações

2 são maiores do que 7:

$\Rightarrow 8$ e 9 : $\frac{1}{} \times \frac{1}{} \times C_2^8 = 28$

$\boxed{X = 2} \Rightarrow 28$ combinações

15/04/16

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{112}{210} + \frac{28}{210} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

e) Todos sejam ímpares.

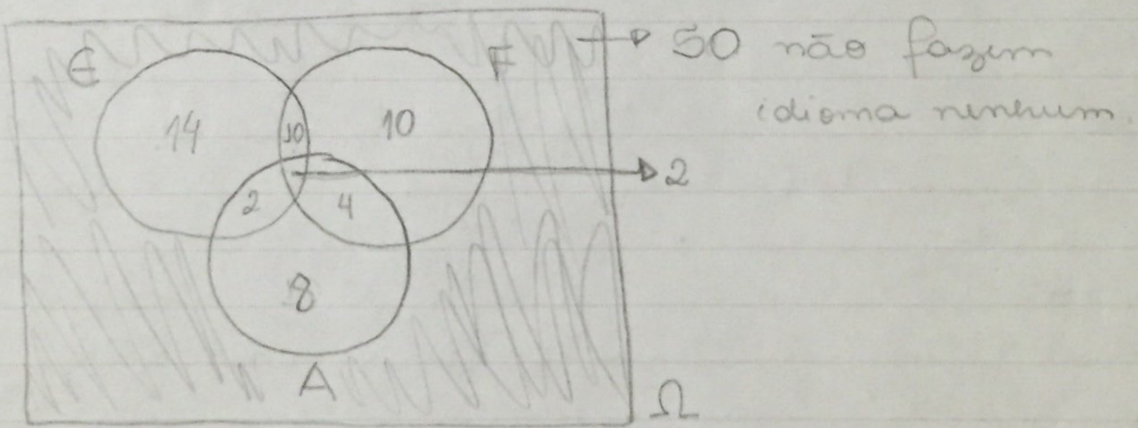
$$= \frac{C_4^5}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42} = 0{,}0238$$

4) 100 alunos:

$P(E) = 0{,}28$ $\quad P(E \cap F) = 0{,}12$ $\quad P(E \cap A \cap F) = 0{,}02$

$P(F) = 0{,}26$ $\quad P(E \cap A) = 0{,}04$

$P(A) = 0{,}16$ $\quad P(F \cap A) = 0{,}06$



a) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) P(somente E) + P(somente F) + P(somente A)

$$= \frac{14}{100} + \frac{10}{100} + \frac{8}{100} = \frac{32}{100} = \frac{8}{25} = 0{,}32$$

c) P(Só um estar cursando alguma língua) + ☆

P(Os dois estarem cursando alguma língua) ☆☆

15 / 04 / 16

★ P(Só um cursar uma língua)

$\underset{\text{cursar}}{\underline{1/2}} \overset{e}{\times} \underset{\tilde{n}\text{ cursar}}{\underline{1/2}}$ ou $\underset{\tilde{n}\text{ cursar}}{\underline{1/2}} \overset{e}{\times} \underset{\text{cursar}}{\underline{1/2}}$

$= 0.25 + 0.25$

★★ P(Os dois cursarem)

$\underset{\text{cursar}}{\underline{1/2}} \overset{e}{\times} \underset{\text{cursar}}{\underline{1/2}} = 0.25 \longrightarrow 3(0,25) = 0.75$

5) nºs primos entre 1 e 50: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47}

$P(\text{ímpar}) = \frac{14}{15} = 0.93$

6) $n = 15$

p(sucesso → eficaz na cura) = 0.8

X: nº curados dentre os 15 pacientes

$X \sim \text{Binomial}(n = 15,\ p = 0.8)$

a)

b) $E(X) = n \cdot p = 15 \times 0.8 = 12$

"Espera-se que, em média, 12 pacientes sejam curados após o tratamento".

c) $P(X = 15) = \binom{15}{15} 0.8^{15} (0,2)^{0} = 0.8^{15} = 0.0352$

d) Y: nº pacientes não curados
$Y \sim Bin(n=15, p=0,2)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] = 1 - (0,0352 + 0,1319) =$

$P(Y=0) = \binom{15}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^{15} = 0.0352$

$P(Y=1) = \binom{15}{1} \times 0,2^1 \times 0,8^{14} = 15 \times 0,2 \times 0,8^{14} = 0,1319$

$P(Y \geq 2) = 0.8329$

↳ "No máximo 13 sejam curados"

7) X - nº de revisores que detectam um erro específico.

A: Revisor A detecta um erro $P(A) = 0,92$ e $P(A^c) = 0,08$
B: Revisor B detecta um erro $P(B) = 0,85$ e $P(B^c) = 0,15$
C: Revisor C detecta um erro $P(C) = 0,95$ e $P(C^c) = 0,05$

$P(X=0) = P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c) \times P(B^c) \times P(C^c)$
$= 0,08 \times 0,15 \times 0,05 = 0,0006$

$P(X=1) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C)$
$= 0,92 \times 0,15 \times 0,05$
$+ 0,08 \times 0,85 \times 0,05$
$+ 0,08 \times 0,15 \times 0,95$
$= 0.0069 + 0.0034 + 0.0114 = 0.0217$

$P(X=2) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C)$
$= 0,92 \times 0,85 \times 0,05$
$+ 0,92 \times 0,15 \times 0,95$
$+ 0,08 \times 0,85 \times 0,95$
$= 0,0391 + 0,1311 + 0,0646 = 0,2348$

15 / 04 / 16

$P(X=3) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$
$= 0.92 \times 0.85 \times 0.95$
$= 0.7429$

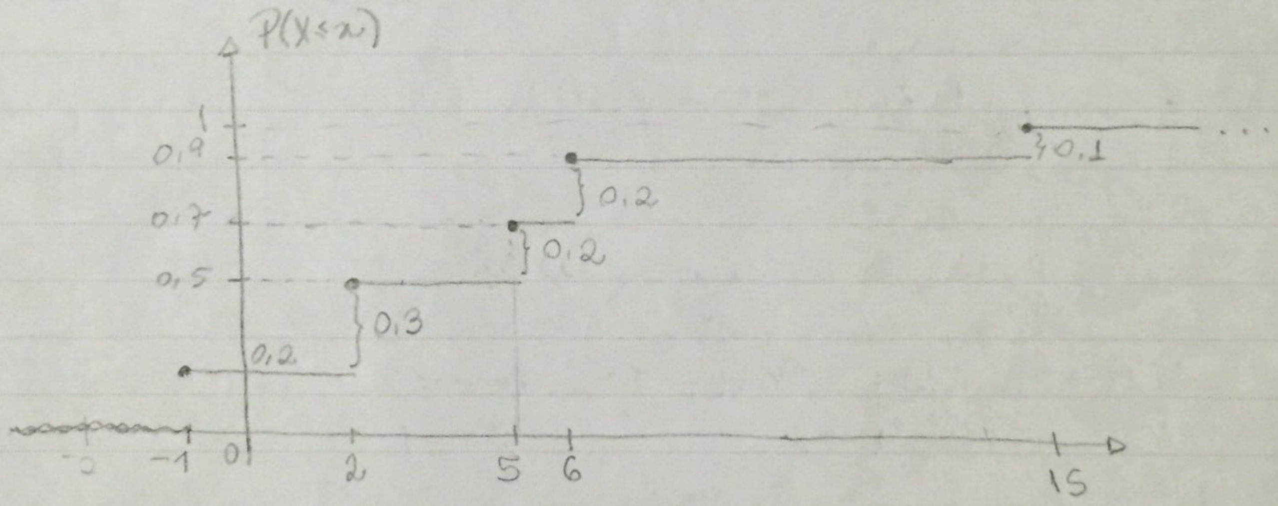
x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,0006	0,0217	0,2348	0,7429

$\sum = 1$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.0006 = 0.9994$ //

b) $P(X=2) = 0.2348$ //

8)



a)

x_i	-1	2	5	6	15
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

$\sum P_i = 1$

b) i) $P(X \leq -2) = 0$

ii) $P(X < 2) = 0,2$

iii) $P(3 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X < 3)$
$= 0,9 - 0,5 = 0,4$

iv) $P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0,9 = 0,1$

15/04/16

9) Lote = 500 , $n = 5$

X = nº de equipamentos defeituosos

Se $X = 0 \Rightarrow$ lote aprovado
Se $X \geq 1 \Rightarrow$ todas as unidades são inspecionadas

$$p(\text{defeito}) = \frac{10}{500} = 0.02$$

$X \sim Bin(n = 5, p = 0{,}02)$

$$P(X \geq 1)? = 1 - P(X=0) = 1 - \left[\binom{5}{0} 0{,}02^0 (0{,}98)^5\right]$$
$$= 1 - 0.9039 = 0.0961$$

10) R: resistência (em tons)
se $R \geq 3$, vigas são aprovadas

X: nº de vigas aptas para construção
$X \sim Bin(n = 15, p = P(R \geq 3))$

$$P(R \geq 3) = 1 - P(R \leq 2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

$X \sim Bin(n = 15, p = 0{,}9)$ $\quad P(X = x) = \binom{15}{x} 0{,}9^x (0{,}1)^{15-x}$

a) $P(X = 15) = \binom{15}{15} 0{,}9^{15} \, 0{,}1^0 = 0{,}2059$

b) $P(X \geq 12) = P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + P(X=15)$
$$= \binom{15}{12} 0{,}9^{12} \, 0{,}1^3 + \binom{15}{13} 0{,}9^{13} \, 0{,}1^2 + \binom{15}{14} 0{,}9^{14} \, 0{,}1^1 + 0.2059$$
$$= 0{,}1285 + 0.2669 + 0.3432 + 0.2059$$
$$= 0.9445$$

15/04/16

11) $n = 10$ $p(\text{sucesso}) = 0,1$

X = nº de explorações bem sucedidas

$X \sim Bin(n=10, p=0,1)$

a) $E(X) = \mu_x = n \cdot p = 10 \times 0,1 = 1$ //

$V(X) = \sigma_x^2 = np(1-p) = 10 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9$ //

b) Custo inicial fixo - R$ 20000,00
Custo por exploração bem sucedida = R$ 30000,00
Custo por exploração mal sucedida = R$ 15000,00

$C = R\$ 20000,00 + R\$ 30000,00 \times X +$
$R\$ 15000,00 \times Y$

onde Y = nº de explorações mal sucedidas

$Y \sim Bin(10, 0,9) \rightarrow E(Y) = n \cdot p = 10 \times 0,9 = 9$

$E(C) = E(R\$ 20000,00 + R\$ 30000,00\, X +$
$R\$ 15000,00\, Y)$

$E(C) = E(R\$ 20000,00) + E(R\$ 30000,00\, X) +$
$E(R\$ 15000,00\, Y)$

$E(C) = R\$ 20000,00 + R\$ 30000,00 \times E(X) +$
$R\$ 15000,00 \times E(Y)$

$E(C) = R\$ 20000,00 + (R\$ 30000,00 \times 1) +$
$(R\$ 15000,00 \times 9)$

$E(C) = R\$ 185000,00$ //

15/04/16

12) P(detectar uma rachadura) = $P_1 \times P_2 \times P_3$

a) Que esses eventos são INDEPENDENTES. //

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 $\quad P(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) = P(\varepsilon_1) \times P(\varepsilon_2) \times P(\varepsilon_3)$

b) $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$ e $p_3 = 0{,}5$

$n = 3$

X = nº de aviões onde é detectada uma rachadura.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.

$X \sim Bin(n = 3, p = p_1 \times p_2 \times p_3) \Leftrightarrow X \sim Bin(n = 3, p = 0{,}36)$

$1 - P(X=0) = 1 - \left[\binom{3}{0} 0{,}36^0 . 0{,}64^3\right] = 1 - 0{,}2621 = 0{,}7379$ //

13) X = nº pedidos que chegam hora.
$X \sim Poisson(\lambda = 5)$

a) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$= 1 - \left[\frac{e^{-5} \times 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} \times 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} . 5^2}{2!}\right] = 1 - \left[e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{25}{2} e^{-5}\right]$

$= 1 - \left[e^{-5}\left(6 + \frac{25}{2}\right)\right] = 1 - \left[e^{-5}\left(\frac{37}{2}\right)\right] = 1 - 0{,}1247$

$P(X > 2) = 0{,}8753$ //

15/04/16

b) 5 pedidos $\longrightarrow$ 1 hora
? pedidos $\longleftarrow$ 8 horas

8 horas $\Rightarrow$ 40 pedidos

$Y \sim Poisson(\lambda^* = 40)$

$P(Y=50) = \frac{e^{-40} \cdot 40^{50}}{50!} = 0,0177$

14) X = nº erros cometidos por um digitador

$X \sim Poisson(\lambda = 4)$

$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$= \frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!}$

$= e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4} + \frac{64}{6} e^{-4} + \frac{64}{6} e^{-4}$

$= (13 + \frac{128}{6}) e^{-4} = \frac{206}{6} e^{-4} = 0.6288$ //

15) $Y \sim Poisson(\lambda)$

$P(Y=0) = P(Y=1) \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!} = \boxed{\lambda = 1}$

$P(Y=2) = \frac{e^{-1} \, 1^2}{2!} = 0.1839$

16) a) Se $X \sim Geo(p)$, $P(X=x) = (1-p)^{x-1}(p)$ $\rightarrow$ x contém o sucesso

ou $P(X=x) = (1-p)^x (p)$ $\rightarrow$ x ñ contém o sucesso

15/04/16

Se a revisão for no 10° dia:

$(0,95)^9(0,05)^1 = 0,0315$

Se a revisão for no 11° dia:

$(0,95)^{10}(0,05)^1 = 0.0299$

b) $P(X \geq 15) = 1 - \overbrace{P(X<15)}^{*}$

Se a revisão for a partir do 15°:

*

$P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=14)$

$= (0,95)^0 0,05 + (0,95)^1 0,05 + \cdots + (0,95)^{14} 0,05$

$= 0,05(0,95^0 + 0,95^1 + 0,95^2 + \ldots + 0,95^{14})$

$= 0,05(10,7342)$

$= 0,5367$ //

$P(X \geq 15) = 1 - 0,5367 = 0,4633$ //

c)

15/04/16

17) X: duração de uma lâmpada (centenas de hrs)

$X \sim Geo(p = 0,7)$

a) $P(X<5) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$= 0,7^0 \, 0,3^1 + 0,7^1 \, 0,3 + 0,7^2 \, 0,3 + 0,7^3 \, 0,3 + 0,7^4 \, 0,3$

$= 0.3(0,7^0+0,7^1+0,7^2+0,7^3+0,7^4)$

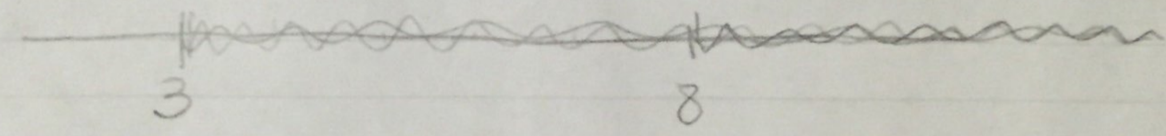
$= 0.3(2,77315)$

$= 0.8319$

b) $P(2<X<4) = P(X=3)$

$= (0,7)^3(0,3) = 0.1029$

c) $P(X>8 \mid X>3) = \dfrac{P(X>8)}{P(X>3)} = \dfrac{1-P(X\leq 8)}{1-P(X\leq 3)} = \dfrac{0.0404}{0.2401} = 0,1682$



$$\left.\begin{aligned} &= 1-[0,3(0,7^0+0,7^1+0,7^2+0,7^3+\dots+0,7^8)] \\ &= 1-[0,3(3,1988)] \\ &= 1-0,9596 \\ &= 0,0404 \end{aligned}\right\} P(X>8)$$

$$\left.\begin{aligned} &= 1-[0,3(0,7^0+0,7^1+0,7^2+0,7^3)] \\ &= 1-[0,3(2.533)] \\ &= 1-0.7599 \\ &= 0.2401 \end{aligned}\right\} P(X>3)$$

15/04/16

18) X: nº de lançamentos até o primeiro sucesso
X ~ Geo(1/2)

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{(1/2)} = 2$$

19) 20 livros $\boxed{n = 4}$

4 defeituosos, 16 perfeitos

X ~ Hipergeo (N=20, n=4, r=4)

$$P(X=x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{16}{4-x}}{\binom{20}{4}}$$, X = nº de defeituosos

a) $$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{16}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{4 \times 16}{4845} = 0.0132$$

b) $$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{1 \times 1820}{4845} = 0.3756$$ } Restar o mesmo nº

$$P(X=4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{16}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{4 \times 1}{4845} = 0.0008$$ } Não restar nenhum

15 / 04 / 16

20) 9 jacarés $\boxed{n=3}$

4 jacarés-negro 5 jacarés-coroa

Seja X = nº de jacarés-negro capturados

$X \sim Hiper(N=9, n=3, r=4)$

a) $P(X=3) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{4 \times 1}{84} = 0.0476$ //

b) $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \underbrace{P(X=3)}_{0,0476}$

$P(X=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{4 \times 10}{84} = 0.4762$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{6 \times 5}{84} = 0.3571$

$P(X \geq 1) = 0.4762 + 0.3571 + 0.0476$

$P(X \geq 1) = 0.8809$ //

~ || ~